



Kommer du ihåg hur det känns att sitta i en snurrande kopp, som i Kaffekoppen på Liseberg eller Tekopparna på Gröna Lund eller står du hellre bredvid och tittar på dem som åker? Ser du hur hela golvet ('kaffebordet') roterar medsols medan de tre 'brickorna' roterar motsols? Snurrigt!

Karuseller med rotationer runt två vertikala axlar finns i många versioner. På Tivoli i Köpenhamn kan man se liknande rörelser i Fata Morgana. I JukeBox på Liseberg eller Bläckfisken på Gröna Lund rör man sig dessutom upp eller ner. Men hur kan banorna se ut?

Varje bricka i Kaffekoppen eller Tekopparna har tre koppar med plats för upp till 5 personer som kan få koppen att rotera genom att vrida på ringen i mitten av koppen. (Bild 2) Enligt informationen på liseberg.se är huvudrotationen 8 varv per minut, medan gondolrotationen är 20 varv per minut. Men hur rör sig en kopp?

Stå en stund och observera. I vilka lägen rör koppen sig snabbast? Är det närmast kannan eller längst ifrån som hastigheterna från de två rotationsrörelserna är i samma eller motsatt riktning? Vilken av skisserna i bild 4 beskriver bäst koppens rörelse?

Hur känns det när man åker? Att röra sig i cirkel kräver en acceleration in mot centrum. När man är längst ut kommer accelerationen från båda cirkelrörelserna att vara riktade mot kannan, medan de nästan tar ut varandra när man är närmast kannan.



Bild 1. Kaffekoppen på Liseberg.



Bild 2. Tekopparna på Gröna Lund i Stockholm och Fata Morgana på Tivoli i Köpenhamn. Tekopparna är en Kaffeemühle från Mach, liksom Kaffekoppen på Liseberg. Fata Morgana är en Condor från Huss.



Geometri för kaffe- och tekoppar

Mätning med tumstock ger att centrum av brickan befinner sig på avståndet $R=3.55$ m från kaffebordets centrum, och centrum av en kopp är $r=1.55$ m från brickans centrum (se bild 3).

Medan man väntar på sin tur kan man fundera över hur många koppar man skulle kunna fylla med kannan i mitten. Man kan också observera åkturen och försöka följa rörelsen för en kopp, som kanske inte snurrar riktigt lika mycket som man först tror.

Rörelsen kan beskrivas i koordinatform som

$$(x,y) = R(\cos \Omega t, \sin \Omega t) + r(\cos \omega t, \sin \omega t) \quad (1)$$

där Ω är vinkelhastigheten för huvudrotationen och $\omega = q\Omega$ vinkelhastigheten för brickornas rotation. Den relativa vinkelhastigheten blir då $\Omega - \omega$ och en kopp kommer att vara närmast kannan efter tiden $T = 2\pi/(\Omega - \omega)$.

Prova att lägga in uttrycket i ett kalkylark och variera kvoten ω/Ω .

Bild 4 visar några möjligheter för olika värden. Var rör man sig snabbast? Var är accelerationen som störst. Vilken bana väntar du dig för huvudrotationen 8 varv/minut om varje kopp är närmast kannan var tredje sekund, dvs 20 gånger per minut? (Brickan roterar då 12 varv per minut relativt marken.)

I WolframAlpha.com kan man klistra in uttrycket i (1) i sökrutan, t.ex. som parametric plot($3.55*\cos(8t)+1.55*\cos(-12*t), 3.55*\sin(8t)+1.55*\sin(-12*t)$)

Observationer

Filmen youtu.be/gDKHQ6JpWvY visar 1 minut av Kaffekoppens rörelse, och det ser ut som om det tar ungefär 23 sekunder för en bricka att komma 3 varv och en kopp hinner under samma tid komma längst från kannan 7 gånger. Det innebär att $(\Omega - \omega)/\Omega \approx -7/3$ och $\omega/\Omega \approx -4/3$. Detta svarar mot bild 4B. En observation i mars 2026 gav ett mönster som mest liknar den femuddiga stjärnan i 4A och stämmer med kvoten $\omega/\Omega = -12/8 = -3/2$. I diskussionerna nedan kommer vi dock att använda värdena från filmen. Det är lätt att använda instruktionerna för att själv prova animeringar med andra värden.

Om man glömmer hastigheten och hur snurrigt det blir, och bara vill få koll på vilken bana koppen rör sig i kan man tänka sig karusellens bricka som ett hjul som rullar längs med insidan

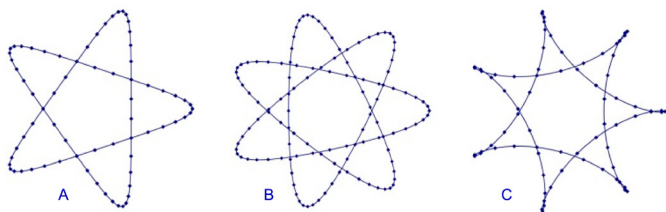


Bild 4: Vilken bild beskriver bäst hur en kopp rör sig? Bilderna är ritade för kvoterna $\omega/\Omega \approx -4/3$, $-3/2$ och $-5/2$.

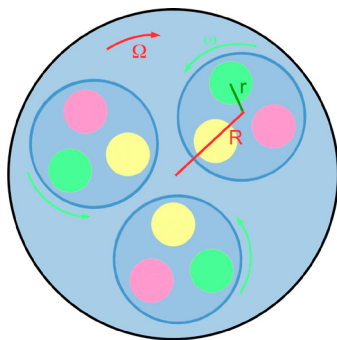


Bild 3. Kaffebordets geometri

av en större cirkel. Rörelsen för en kaffekopp kan beskrivas matematiskt som en hypotrokoïd, som skapas genom att följa spåret av en punkt på en cirkel som rullar på insidan av en större cirkel. I Experimentverkstaden under Göteborgs internationella vetenskapsfestival finns en station med spirografer, framtagen av matematikinstitutionen (Bild 5). Mönstren beror på kvoten mellan radierna och kan kopplas till delbarhet. Bild 6 visar exempel där ett hjul med 5 eller 8 kuggar rullar innanför en cirkel med 25 kuggar. Mönstren beror också på hur långt ifrån centrum pennan placeras på det lilla hjulet. Bild 8 visar fler exempel på bilder som skapats med olika kombinationer.



Bild 5. Spirograf-station under Vetenskapsfestivalen.

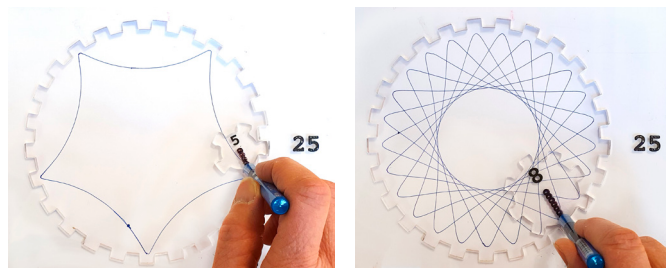


Bild 6. Spirograf-bilder med 25 kuggar på yttre cirkeln och 5 eller 8 kuggar på hjulen.

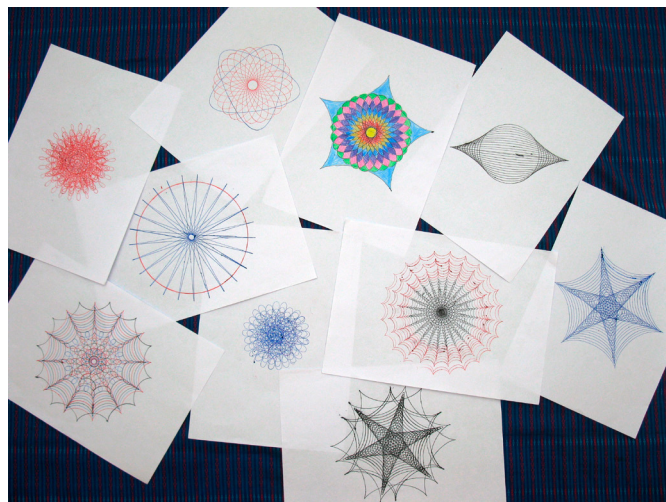


Bild 7. Exempel på spirograf-genererade bilder (Hypotrokoïder).

Hypotrokoider: Kaffekoppen och cirklar i cirklar

För att beskriva utseendet av koppens bana flyttar vi ifrån karusellen och tittar på ett cykelhjul. Tänk på en vit prick ritad på sidan av däck och rulla fram på trottoaren. Hjulet går i cirklar samtidigt som den går framåt. Sett utifrån, så går pricken upp och ner i bågar. Bågarna är inte halvcirklar, utan de bildar en kurva som heter **cykloid**.

Tänk nu att hjulet rullas inuti en större cirkel, längs med kanten. Efter några varv går bågarna in i varandra som i figur 4C. Kurvan heter **hypocykloid** (från det grekiska hypo, *ύπό*, under, eller här innanför). Varje gång pricken nuddar den stora cirkeln och rullar inåt igen får man en spets och en ny båge börjar. Flyttar man pricken längre in på hjulet, närmare mittpunkten, så beskriver pricken en mjukare bana, med rundade uddar istället för spetsar som i Figur 4A eller 4B. En sådan kurva kallas för **hypotrokoid** (efter τροχός, hjul på grekiska). I extremfallet då pricken ligger på hjulets mittpunkt får man den mjukaste av kurvan, nämligen en cirkel, med radie differensen mellan cirkeln och hjulets radier.

Hypotrokoidens utseende beror alltså på 3 parametrar: Cirkelns radie C , hjulets (eller brickans) radie b och avståndet r mellan hjulets mittpunkt och pricken. (R i karusellens beskrivning ges av relationen

$R = C - b$.) Bild 8 visar en hel familj av hypotrokoider, med samma radier C och b och olika avstånd r , från $r=b$ som ger en hypocykloid till $r=0$ som ger en cirkel.

Rotationer, revolutioner och minsta gemensamma multipel

Vad är det som avgör helhetsbilden, alltså hur många uddar kurvan har? I karusellens sammanhang är det förhållandet mellan rotationshastigheterna. Uttryckt i cirklar och radier är det förhållandet mellan radierna C för den stora cirkeln och b för brickan eller hjulet, och där kommer lite talteori in. Förhållandet mellan radierna är samma som förhållandet mellan cirkelnas omkrets.

I spirografvarianten består omkretsen av kuggar och hjulets kuggar passar in i den stora cirkelns kuggar, se Bild 6. Varje gång hjulet roterar ett varv, så kommer pennan närmast kanten och ritas en udde. Så frågan är hur många gånger hjulet rullar innan den kommer tillbaka till sin startpunkt. Lättast syns det om man tar ett hjul vars kuggantal delar cirkelns kuggantal, som i Bild 6a där ett 5-hjul roterar 5 gånger i en 25-cirkel och ritas ut 5 uddar. Även kurvorna i Bild 6b har 5 uddar, men man ser att pennan inte går direkt från ena udden till nästa, utan banan slingrar sig närmare figurens mittpunkt. De är ritade med ett 15-hjul i samma 25-cirkel. Så när hjulet har

roterat 5 varv har den passerat $5 \times 15 = 75$ kuggar, dvs gjort 3 revolutioner runt 25-cirkeln.

Den minsta gemensamma multipeln av hjultalet och cirkeltalet anger antalet kuggar som passerats innan hjulet kommer tillbaka till sin startposition. I Bild 6b innebär det att 8-hjulet måste gå 25 rotationer för att passera MGM(25, 8) = 25×8 kuggar, och ritas därmed 25 uddar. Även Bild 9 visar man ritat igen en hel familj av hypotrokoider, genom att variera pennans position, med samma 15-hjul som i Bild 8, men denna gång inom en cirkel med 24 kuggar, vilket ger upphov till 8 uddar.

Man kan även tänka sig en oändlig variant, där förhållandet mellan hjulets och cirkelnas radier är ett irrationellt tal (det går ju inte att konstruera med kugg-hjul). Då skulle banan aldrig komma tillbaka till sin startpunkt utan varje varv skulle ge upphov till ett nytt spår.

Motsvarande kurvor som fås om man rullar hjulet utanför cirkeln heter epicykloid (från det grekiska *ἐπί*, på, ovanför) och epitrokoid. De kan beskrivas av $(x, y) = R(\cos t, \sin t) + r(\cos R/b t, \sin R/b t)$. (Notera att för en matematiker kan t vara dimensionslöst, medan en fysiker föredrar att multiplicera med en vinkelhastighet ω för att få en vinkel som argument för de trigonometiska funktionerna.)

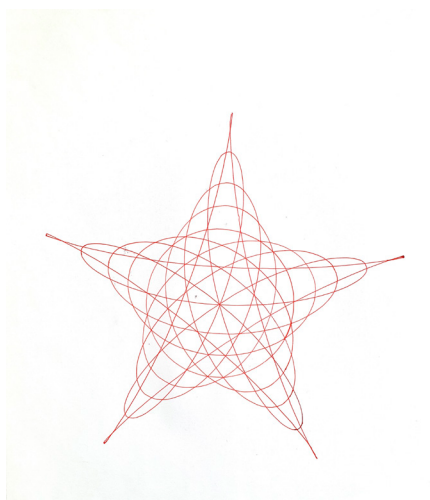


Bild 8. En hel familj av hypotrokoider, med samma radier C och b , men avstånd r , som varierar från $r = 0$ till $r = b$.

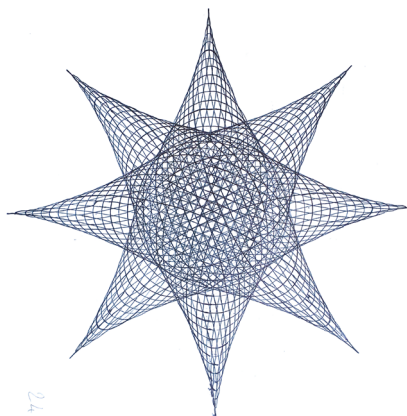


Bild 9. Hypotrokoid-familj genererat med ett 15-hjul inom en cirkel med 24 kuggar.

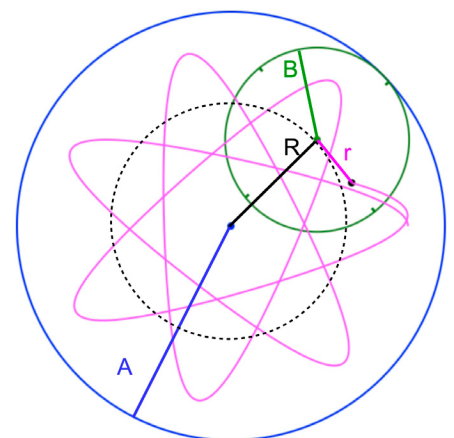


Bild 10. Spirograf-bild som approximerar rörelsen för en kopp, skapad med engaging-data.com/interactive-spirograph med kvoten $R/A = 43\%$ och hålet på ett avstånd $r/B \approx 60\%$ från den lilla cirkeln centrum. Vi har dessutom markerat de olika radier som är inblandade.

Spirografer

I leksaksaffärer kan man köpa Spirograf-set för att skapa olika hypotrokoïder. Man kan också prova virtuella spirografer, t.ex. på engaging-data.com/interactive-spirograph, som har använts för att skapa bild 10, där vi har ritat in A och B som får beteckna radierna för den stora och lilla cirkeln. Kvoten $B/A = 0.43 \approx 3/7$, ger en radie för huvudcirkeln $R = A - B \approx 4A/7$.

I programmet behöver man också ange pennans avstånd h till centrum för den mindre hjulet uttryckt som procent av radien. Kvoten r/R i (1) kan uttryckas som $r/R = hB / (A-B) = b / (A/B - 1)$, vilket ger

$$h = (r/R) (A/B - 1) = 4r/3R.$$

För geometrin i bild 3 får vi $h \approx 0.58$.

Desmos

Programmet Desmos ger möjlighet att animera rörelser. På sidan www.desmos.com/calculator/sps0bbhjmf finns en animering med spår efter banan för en av kopparna (se också bild 11). Denna animering bygger på en fil vi fick från matematikern Anthony Loveless på University Washington. Han demonstrerar den på youtu.be/yDHSIcxq_nw. Prova att ändra värden och se resultatet. Det går att spara ned sina ändringar i en egen kopia.

Acceleration och krafter

Genom att derivera den parametriska beskrivningen av rörelsen i ekvation (1) får vi också uttryck för hastighet $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = R\Omega(-\sin \Omega t, \cos \Omega t) + r\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t)$. Storleken på hastigheten kan alltså variera mellan $|R\Omega + r\omega|$ och $|R\Omega - r\omega|$ – mellan 1.9 m/s och 3.0 m/s.

På motsvarande sätt får vi ett uttryck för accelerationen $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = -R\Omega^2(\cos \Omega t, \sin \Omega t) - r\omega^2(\cos \omega t, \sin \omega t)$.

Brickans acceleration, $-R\Omega^2$, på grund av huvudrotationen blir ungefär 0.25 g rakt in mot centrum. Accelerationen för centrum av en kopp på grund av brickans rotation blir $r\omega^2 \approx 0.20$ g, men för personen som åker kan den bli upp till 0.25 g om man tar hänsyn till avståndet från koppens centrum, och även koppens eventuella rotation i förhållande till brickan.

Figur 12 visar en konstruktion av rörelsen för en kvot $\omega/\Omega = -4/3$ med koppens läge och brickans centrum markerade för några punkter på väg från ett ytterläge till nästa och även

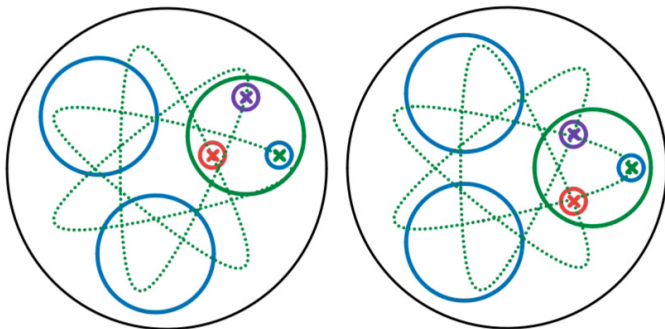


Bild 11: Spåret visar rörelsen för den gröna koppens för kvoten $\omega/\Omega = -4/3$. Den högra bilden visar läget när den precis har kommit tillbaka till ursprungsläget, medan den vänstra visar situationen precis innan. Notera hur olika långt de olika kopparna flyttar sig mellan bilderna!

bidrag till accelerationen från huvudrotation och rotation av 'brickorna'. Närmast kannan där farten är störst blir accelerationen väldigt nära noll, medan accelerationen är som störst, ungefär 0.5 g när man är längst bort, där båda bidragen är riktade in mot kannan.

Efter ytterläget roterar brickan med koppens så att accelerationen på grund av huvudrotationen blir riktad till höger, innan den blir motriktad och sedan riktad åt vänster innan den kommer till nästa ytterläge.

Beräknade värden kan jämföras med accelerometerdata i figur 13. Accelerometern följer med åkturen och visar värden i sitt eget koordinatsystem där x-axeln pekar in mot koppens centrum och y-axeln åt vänster. Strax före varje ytterläge där totala accelerationen är som störst är a_y positiv, vilket innebär en acceleration åt vänster, som bara kan komma från huvudrotationen. Efter ytterläget, där accelerationen i sidled är noll, blir a_y i stället negativ, vilket svarar mot acceleration åt höger.

I bild 11 har vi antagit att koppens orientering följer med brickan. När man åker kan man uppleva att rotationshastigheten ökar något i anslutning till ytterlägena, så att man alltid har ryggen ut från centrum (om man inte aktivt roterar koppen). Det innebär att även accelerometervärdena kan bli något större.

Visuell uppskattning av accelerationen

En horisontell acceleration, a , kan uppskattas genom vinkeln $\theta = \arctan(a/g)$ för ett medföljande litet mjukt föremål i snöre, som i Bild 13. För 0.5g blir detta drygt 25°.

Åka karusell och äta karamell

När Anna Maria Roos' tre små gummor tänkte åka karusell i början av 1900-talet fanns det troligen inte några te- eller kaffekoppar bland karusellerna. Den officiella patentklassen A63G 1, *Merry-Go-Rounds or Roundabouts*, på worldwide.espacenet.com/classification innehåller ett stort antal underkategorier, t.ex. klassiska karuseller med djur, A63G 1/30 *with seats moving up-and-down, e.g. figure-seats*. Under A63G 1/28 kan vi ana en beskrivning Slänggungan på Liseberg och Kättingflygaren och Eclipse på Gröna Lund: *with centrifugally-swingable suspended seats*. Under A63G 1/34 *with seats moving in an undulating track* känner vi kanske igen Fisketuren på Liseberg.

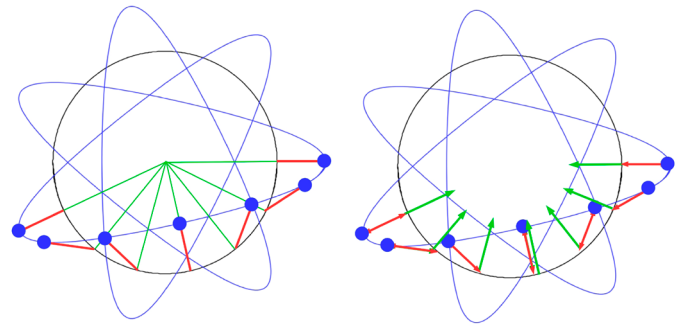


Bild 12: Illustration av en Kaffekopps rörelse från ett ytterläge till nästa för en kvot $\omega/\Omega = -4/3$ där Ω är negativ för en medurs huvudrotation. Den högra bilden visar den totala accelerationen i varje punkt som en summa av accelerationen från huvudrotationen (i grönt) och från brickans rotation i olika lägen (i rött).

Disney's klassiska Tekoppar skulle kunna finnas under A63G 1/24 *with seats performing movements in a horizontal plane, other than circular movements* och möjligen även under A63G 1/26 *with seats moving with a planetary motion in a horizontal plane*. Disney's originalpatent, USD180585S, för de klassiska tekopparna i Mad Tea Party, med den ospecifika rubriken *Passenger carrying amusement device*, lyckas vi inte hitta i Espacenet, men däremot i Googles patentsökning, på patents.google.com/patent/USD180585S. Patentet från

1957 gör anspråk på 'ornamental design' och hänvisar bara till tre tidigare patent: US1129065 av Brest från 1915 som beskriver en leksakskarusell, USD69899S av Mahoney 1926 med design för tekopp, och USD174295S av Sneed 1955 för Carousel-type amusement device.

Ett nyare Disney-patent, US8678940, beskriver *Amusement park ride with multiple vertical rotation axes combined with vertical translation motion* och hänvisar till A63G 1/28 men också A63G 30 *with seats moving up and down* som också skulle passa på FataMorgana i

bild 2b. Ett av de citerade dokumenten, US1520592, är ett patent för en *Amusement apparatus* av Mongillo från 1924, i kategorin A63G 1/26 *with seats moving with a planetary motion in a horizontal plane*, där ritningarna visar kuggar som gör det möjligt att också låta brickornas rotationsriktning växla under turen.

Bland gungor och berg- och dalbanor

Många ungdomar kallar alla åkattraktioner för karuseller, men det stämmer inte riktigt. På marknaden i Nora (NoraMarken.se) kanske tivolibesökare 2026 också kan prova stora gungor, radiobilar och en liten berg- och dalbana. Patentklassen A63G för åkattraktioner har flera undergrupper: Gungor och pendlar finns under A63G 9, Radiobilar under A63G 25, och Pariserhjul under A63G 27, medan A63G 7 inkluderar berg- och dalbanor. Huvudklassen A avser *Human necessities*.

Är du rädd att må illa i karuseller, gungor och berg- och dalbanor? Det finns mindre risk för illamående i torn där man faller (nästan) fritt, från små torn för barn till höga torn för våghalsar. Man kan också hålla sig på marken och gå runt och spana efter rotationsaxlar; horisontella, vertikala eller en kombination. Finns det cirkelrörelser där personen som åker inte roterar? Hur roterar kroppen i en berg- och dalbana?

I LMNT-nytt 2024:4, s 14-18 beskrivs hur man kan mäta krafter och vinkelhastigheter med telefonen, men hur känns det? Berg- och dalbane-designern Werner Stengel, som blev hedersdoktor vid Göteborgs universitet 2005, kommenterade under en tur i Balder på Liseberg: "Hur kan man förklara upplevelsen för någon som inte har åkt? Det är som att förklara färger för en blind".

Ann-Marie Pendrill, prof. em.
Göteborgs universitet,
Ann-Marie.Pendrill@physics.gu.se

Laura Fainsilber, Universitetslektor,
Matematiska vetenskaper,
Göteborgs universitet och Chalmers,
Laura@chalmers.se

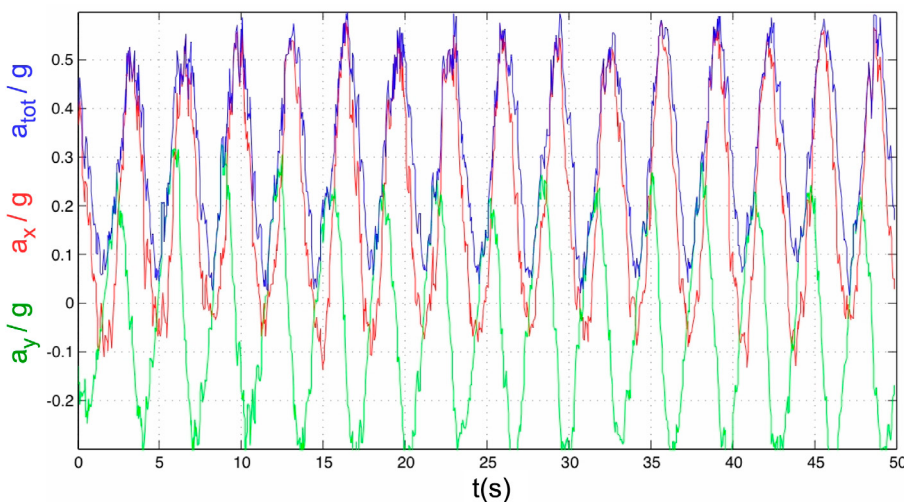


Bild 13. Accelerometerdata för en tur med Tekopparna. Koordinatsystemet är valt så att x-axeln pekar framåt för den som åker och y-axeln pekar åt vänster. Notera hur y-värdet är positivt strax innan koppen har nått ytterläget.

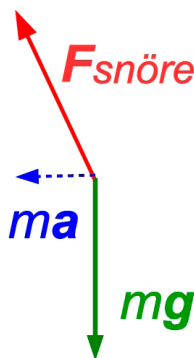


Bild 14. En medföljande visuell accelerometer och ett frikroppsdiagram för de krafter som verkar på det accelererande gosedjuret i snöre.